$(n+1)$-ARY DERIVATIONS OF SIMPLE MALCEV ALGEBRAS

Ivan Kaygorodov
e-mail: kib@math.nsc.ru
Sobolev Inst. of Mathematics
Novosibirsk, Russia

Abstract:

We defined $(n+1)$-ary derivations of n-ary algebras. We described 3-derivations of simple Malcev algebras and 4-ary derivations of simple ternary Malcev algebra M_8.

Key words: $(n+1)$-ary derivation, Malcev algebra, ternary Malcev algebra.

1. Введение

Одним из способов обобщения дифференцирований является δ-дифференцирование. Под δ-дифференцированием алгебры A, при δ — фиксированном элементе основного поля, мы понимаем линейное отображение $\phi : A \to A$, такое что для произвольных $x, y \in A$ верно

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

В свое время, δ-дифференцирования изучались в работах [1]-[12], где были описаны δ-дифференцирования первичных лиевых [1, 2], первичных альтернативных и мальцевских [3] алгебр, простых [6, 7] и первичных [4] лиевых супералгебр, полупростых конечномерных йордановых алгебр [5, 7] и супералгебр [5, 7, 8, 10], алгебр Филиппова малых размерностей и простых конечномерных алгебр Филиппова [12], а также простой тернарной алгебры Мальцева M_8 [12]. В частности, были построены примеры нетривиальных δ-дифференцирований для некоторых алгебр Ли [2, 4, 11], простых йордановых супералгебр [8, 10] и некоторых n-арных алгебр Филиппова [12].

В тоже время, δ-дифференцирование является частным случаем квазидифференцирования и обобщенного дифференцирования. Под обобщенным дифференцированием D мы понимаем такое линейное отображение, что существуют линейные отображения E и F, связанные с D условием, таким что для произвольных $x, y \in A$ верно

$$D(xy) = E(x)y + xF(y).$$

Если вдобавок к этому $E = F$, то D — квазидифференцирование. Тройки (D, E, F), где D — обобщенное дифференцирование, а E, F — связанные с ним линейные отображения, называются тернарными дифференцированиями. Квазидифференцирования, обобщенные дифференцирования и тернарные дифференцирования рассматривались в работах [13]-[22]. В частности, изучались обобщенные и тернарные дифференцирования алгебр Ли [13], супералгебр Ли [14], ассоциативных алгебр [15, 16], обобщенных алгебр Кэли-Диксона [17], йордановых алгебр [20] и алгебр Филиппова [22].

Понятие тернарного дифференцирования для бинарной алгебры допускает обобщение на случай n-арных алгебр. В данном случае, под $(n+1)$-арным дифференцированием n-арной алгебры A мы подразумеваем такой набор $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in End(A)^{n+1}$, что для произвольных $x_1, \ldots, x_n \in A$ верно

$$f_0[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \ldots, f_i(x_i), \ldots, x_n].$$

Соответственно, для $(n+1)$-арного квазидифференцирования необходимо дополнительно требовать $f_1 = f_2 = \ldots = f_n$. Ясно, что если $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — элементы центроида n-арной алгебры, а D — дифференцирование n-арной алгебры, то наборы $(\sum \psi_i, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ и $(D, D, \ldots, D)$ — являются $(n+1)$-арными дифференцированиями. Приведенные два вида $(n+1)$-арных дифференцирований, а также их линейные комбинации, мы будем считать тривиальными. Ясно, что наибольший интерес представляет вопрос нахождения $(n+1)$-арных дифференцирований, отличных от тривиальных. Легко заметить следующее

Утверждение. Пусть A — (анти)коммутативная n-арная алгебра и $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ — $(n+1)$-арное дифференцирование, тогда для любой подстановки $\sigma \in S_n$ верно, что $(f_0, f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n)})$ — $(n+1)$-арное дифференцирование.

Доказательство. Доказательство данного факта вытекает из известного утверждения о разложении произвольной подстановки в произведение транспозиций и очевидного утверждения леммы если σ — транспозиция. Утверждение доказано.

Обозначим пространство дифференцирований, δ-дифференцирований, квазидифференцирований и обобщенных дифференцирований, соответственно через $Der(A), Der_\delta(A), QDer(A)$ и $GDer(A)$. Очевидно, что мы имеем цепочку включений

$$Der(A) \subseteq Der_\delta(A) \subseteq QDer(A) \subseteq GDer(A) \subseteq End(A). \quad (1)$$

Стоит отметить, что если n-арная алгебра A с ненулевым умножением и характеристика поля отлична от $n-1$, то первое включение всегда строгое. В противном случае, в силу того, что тождественное отображение является элементом центроида и $\frac{1}{n}$-дифференцированием, мы получили бы противоречие с определением умножения в алгебре A. Понятно, что в случае бинарных алгебр ограничение на характеристику поля является не существенным. Ясно, что каждая из алгебр $Der(A), Der_\delta(A), QDer(A)$ и $GDer(A)$ относительно коммутаторного умножения становится алгеброй Ли. Пусть $Ann(GDer(A))$ — аннулятор алгебры Ли обобщенных дифференцирований алгебры A. Отметим, что $Ann(GDer(A))$ не тривиален. Действительно, там лежат отображения вида $\alpha \cdot id$, где α — элемент основного поля. Обозначим

$$\Delta(A) = GDer(A)/Ann(GDer(A)).$$

Также нас будет интересовать структура алгебры Ли $\Delta(A)$.

Отметим, что в работе [12] было показано, что простая 8-мерная тернарная алгебра Мальцева M_8 не имеет нетривиальных δ-дифференцирований. Исследованию $(n+1)$-арных дифференцирований была посвящена работа [22], где были описаны $(n+1)$-арные и обобщенные дифференцирования полупростых

конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Основной целью данной работы, результаты которой аннонсированы в [21], является исследование обобщенных и $(n+1)$-арных дифференцирований простых n-арых алгебр Мальцева, в случае бинарной алгебры Мальцева M_7 (и, следовательно, также любой простой нелиевой бинарной алгебры Мальцева), и тернарной алгебры Мальцева M_8. В работе дано полное описание квазидифференцирований, обобщенных дифференцирований и $(n+1)$-арных дифференцирований алгебр M_7 и M_8. В итоге, с использованием результатов [3, 12], мы имеем, что для алгебр M_7 и M_8 цепочка включений (1) принимает вид

$$Der(A) \subset Der_\delta(A) = QDer(A) = GDer(A) \subset End(A).$$

2. 3-арные дифференцирования бинарной алгебры Мальцева M_7.

Алгебры Мальцева, возникающие в [23], являются естественным обобщением алгебр Ли и удовлетворяют соотношениям

$$J(x,y,xz) = J(x,y,z)x, \text{ где } J(x,y,z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y.$$

Хорошо известно [24], что существует только одна простая нелиева алгебра Мальцева, которой является семимерная алгебра M_7, получающаяся из алгебры Кэли—Диксона.

В случае алгебраически замкнутого поля P характеристики отличной от 2 и 3, в алгебре M_7 можно выбрать следующий базис — так называемый расщепляемый базис

$$B_{M_7} = \{h, x, y, z, x', y', z'\}$$

с таблицей умножения

$$\begin{gathered}
hx = 2x, hy = 2y, hz = 2z,\\
hx' = -2x', hy' = -2y', hz' = -2z',\\
xx' = yy' = zz' = h,\\
xy = 2z', yz = 2x', zx = 2y',\\
x'y' = -2z, y'z' = -2x, z'x' = -2y,
\end{gathered}$$

где все отсутствующие произведения равны нулю (см. [24]). Каждая тройка элементов $\{h, x, x'\}, \{h, y, y'\}, \{h, z, z'\}$ образует стандартный базис трехмерной простой алгебры Ли, а подпространство $P\cdot h$ является картановской подалгебой алгебры M_7.

Теорема 1. Простая алгебра Мальцева M_7 не имеет нетривиальных 3-арных дифференцирований.

Доказательство. Пусть (D, E, F) — тернарное дифференцирование алгебры M_7. Положим

$$D(h) = \gamma h + \sum_{v \in B_{M_7}, v \neq h} \gamma_v v.$$

В этих обозначениях, $(\gamma \cdot id, \frac{\gamma}{2} \cdot id, \frac{\gamma}{2} \cdot id)$ — тернарное дифференцирование. В дальнейшем доказательстве теоремы, тернарное дифференцирование

$$(D - \gamma \cdot id, E - \frac{\gamma}{2} \cdot id, F - \frac{\gamma}{2} \cdot id)$$

мы будем обозначать (D, E, F).

Пусть
$$W(v)=W^v_h h+W^v_x x+W^v_y y+W^v_z z+W^v_{x'}x'+W^v_{y'}y'+W^v_{z'}z',$$
где $W\in\{D,E,F\}, v\in B_{M_7}, W^v_w\in P$.

Заметим, что
$$D(h)=D(xx')=E(x)x'+xF(x')=$$
$$E^x_x h-2E^x_h x'+2E^x_{y'}z-2E^x_{z'}y-2F^{x'}_h x+2F^{x'}_y z'-2F^{x'}_z y'+F^{x'}_{x'}h.$$
Но, в тоже время,
$$D(h)=-D(x'x)=-E(x')x-x'F(x)=F(x)x'+xE(x')=$$
$$F^x_x h-2F^x_h x'+2F^x_{y'}z-2F^x_{z'}y-2E^{x'}_h x+2E^{x'}_y z'-2E^{x'}_z y'+E^{x'}_{x'}h.$$
Сравнивая два полученных равенства, мы имеем
$$F^x_{y'}=E^x_{y'}, F^x_{z'}=E^x_{z'}, E^x_x+F^{x'}_{x'}=E^{x'}_{x'}+F^x_x=0. \tag{2}$$
Отметим, что $0=D(xx)=E(x)x+xF(x)$, то есть
$$E^x_y=F^x_y, E^x_z=F^x_z, E^x_h=F^x_h.$$
В тоже время, $0=D(hh)=E(h)h+hF(h)$, откуда
$$E^h_w=F^h_w, w\in B_{M_7}\setminus\{h\}.$$
Тогда легко видеть, что
$$2D(x)=D(hx)=E(h)x+hF(x)=$$
$$E^h_h x-2E^h_y z'+2E^h_z y'-E^h_{x'}h+2F^x_y y+2F^x_z z-2F^x_{x'}x'-2F^x_{y'}y'-2F^x_{z'}z'+F^x_x x,$$
то есть
$$D^x_y=F^x_y, D^x_z=F^x_z. \tag{3}$$
Заметим, что
$$-2D(x)=D(y'z')=E(y')z'+y'F(z')=$$
$$E^{y'}_{y'}x-2E^{y'}_h z'+E^{y'}_z h+2E^{y'}_{x'}y+2F^{z'}_h y'-F^{z'}_y h+2F^{z'}_{x'}z+F^{z'}_{z'}x, \tag{4}$$
то есть
$$2D^x_h=F^{z'}_y-E^{y'}_z, D^x_y=-E^{y'}_{x'}, \tag{5}$$
$$D^x_z=-F^{z'}_{x'}, D^x_{z'}=E^{y'}_h, D^x_{x'}=0, D^x_{y'}=-F^{z'}_h. \tag{6}$$
Также можно заметить, что
$$-2D^x_x=E^{y'}_{y'}+F^{z'}_{z'}=-F^y_y-E^z_z=2D^{x'}_{x'},$$
где первое равенство вытекакает из (4), второе из (2), а третье из (4) путем замены w на w', где $w\in\{x,y,z\}$, в вычислениях.

Ясно, что аналогично мы можем получить
$$D^z_z=-D^{z'}_{z'} \text{ и } D^y_y=-D^{y'}_{y'}.$$
Легко видеть, что отображение D^*, заданное по правилу
$$D^*(h)=0, D^*(w)=G^w_w w, G^w_w\in P, w\in B_{M_7}\setminus\{h\}, \text{ где}$$
$$G^z_z+G^y_y+G^x_x=0, G^w_w=-G^{w'}_{w'}, w\in\{x,y,z\},$$

является дифференцированием алгебры M_7. Поэтому, в дальнейшем мы можем рассматривать тернарное дифференцирование $(D,E,F)-(D^*,D^*,D^*)$, которое будем обозначать как (D,E,F). Таким образом,

$$D_w^w = 0, w \in B_{M_7} \setminus \{x\}, D_x^x \neq 0.$$

Отметим, что

$$0 = D(xy') = E(x)y' + xF(y') =$$
$$-2E_h^x y' + E_y^x h - 2E_{x'}^x z + 2E_{z'}^x x - 2F_h^{y'} x + 2F_y^{y'} z' - 2F_z^{y'} y' + F_{x'}^{y'} h,$$

что дает

$$E_{x'}^x = 0, F_y^{y'} = 0, E_h^x = -F_z^{y'}. \tag{7}$$

Ясно, что в данных рассуждениях мы могли вместо пары (x,y') брать пары вида (v,w') и (w',v), где $w \neq v$ и $w,v \in \{x,y,z\}$. Таким образом, мы получаем

$$F_w^{w'} = 0, E_w^{w'} = 0, w \in B_{M_7} \setminus \{h\} \text{ и } w'' = w,$$

$$F_y^{z'} = E_h^x, \tag{8}$$
$$F_h^{z'} = -E_{y'}^x. \tag{9}$$

Докажем, что $D_h^x = E_h^x$. Для этого отметим, что выполняется следующая цепочка равенств

$$2D_h^x = F_y^{z'} - E_z^{y'} = E_h^x + F_h^x = 2E_h^x.$$

Первое равенство следует из (5). Второе равенство вытекает из (7) и (8).

Покажем, что $D_{y'}^x = E_{y'}^x$. Для этого достаточно заметить, что

$$D_{y'}^x = -F_h^{z'} \text{ и } F_h^{z'} = -E_{y'}^x.$$

Первое равенство есть последнее равенство в (6), а второе — соотношение (9).

Таким образом, мы показали, что $D_w^x = E_w^x = F_w^x, w \in B_{M_7} \setminus \{x\}$. Легко заметить, что верен и аналогичный результат для элементов $B_{M_7} \setminus \{x\}$, то есть $D_w^u = E_w^u = F_w^u, w \in B_{M_7} \setminus \{u\}$. Ясно, что D мы можем представить в виде суммы дифференцирования D_* и линейного отображения μ, такого что

$$\mu(x') = -\mu_x x', \mu(x) = \mu_x x, \mu(w) = 0, w \in B_{M_7} \setminus \{x, x'\}.$$

Тогда $(\mu, E - D_*, F - D_*)$ является тернарным дифференцированием, которое мы обозначим (μ, ψ, χ), причем ψ и χ на элементах базиса алгебры M_7 действуют скалярно, то есть

$$\psi(w) = \psi_w w, \chi(w) = \chi_w w \text{ для } w \in B_{M_7}.$$

Покажем, что

$$(\mu, \psi, \chi) = (0, \sigma \cdot id, -\sigma \cdot id), \sigma \in P.$$

Достаточно заметить, что

$$\mu(wv) = \psi(w)v + w\chi(v), w, v \in B_{M_7}.$$

Откуда легко извлечь, что

$$-\psi_h = \chi_y = \chi_z = \chi_{y'} = \chi_{z'},$$
$$-\chi_h = \psi_y = \psi_z = \psi_{y'} = \psi_{z'},$$
$$\psi_z = -\chi_{y'},$$

то есть

$$\psi_h = \psi_y = \psi_z = \psi_{y'} = \psi_{z'} = -\chi_h = -\chi_z = -\chi_y = -\chi_{z'} = -\chi_{y'}.$$

Отсюда заключаем, что $\mu_x = \psi_{z'} + \chi_{y'} = 0$. Пользуясь логикой предыдущих рассуждений, получаем, что

$$\psi_h = \psi_x = \psi_{x'} = -\chi_x = -\chi_{x'}.$$

Что и влечет требуемое. Таким образом, любое тернарное дифференцирование алгебры M_7 представимо в виде суммы следующих тернарных дифференцирований

$$(D^*, D^*, D^*) \text{ и } ((\alpha+\beta)\cdot id, \beta\cdot id, \alpha\cdot id),$$

где D^* — дифференцирование алгебры M_7 и $\alpha, \beta \in P$.

Для полного доказательства теоремы осталось установить структуру $\Delta(M_7)$. Хорошо известно [24], что алгебра дифференцирований простой семимерной алгебры Мальцева изоморфна алгебре B_3. Таким образом, мы получили $\Delta(M_7) \cong B_3$. Теорема доказана.

Заметим, что существует только одна простая нелиева алгебра Мальцева над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль (см. [24]), которая изоморфна алгебре M_7. Отсюда и из теоремы 1 имеем

Следствие 2. Простая нелиева алгебра Мальцева над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль не имеет нетривиальных 3-арных дифференцирований.

Заметим, что полупростая конечномерная алгебра Мальцева A над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль представляется в виде прямой суммы простых идеалов I_k. Тогда, следуя схеме доказательств теорем об описании δ-дифференцирований и 3-арных дифференцирований полупростых йордановых алгебр (см. [5, 20]), мы можем получить что каждая компонента 3-арного дифференцирования инвариантна на прямом слагаемом I_k. В свою очередь, согласно [2] существуют простые алгебры Ли обладающие нетривиальными δ-дифференцированиями (а, соответственно, и нетривиальными 3-арными дифференцированиями), например, трехмерная алгебра sl_2 обладает нетривиальным (-1)-дифференцированием. Понятно, что алгебра

$$\underbrace{sl_2 \oplus \ldots \oplus sl_2}_{m \text{ слагаемых}} \oplus \underbrace{M_7 \oplus \ldots \oplus M_7}_{l \text{ слагаемых}}$$

является полупростой нелиевой алгеброй Мальцева и обладает нетривиальным 3-арным дифференцированияем. В частности, 10-мерная нелиева алгебра Мальцева $sl_2 \oplus M_7$. Из приведенных рассуждений вытекает

Следствие 3. Над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль существуют полупростые нелиевые алгебры Мальцева с нетривиальными 3-арными дифференцированиями.

Используя результаты А. Н. Гришкова [25] об отсутствии простых конечномерных бинарно-лиевых алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, отличных от алгебр Мальцева и алгебр Ли, а также, теорему 1, мы получаем

Следствие 4. Если простая конечномерная бинарно-лиева алгебра имеет нетривиальные 3-арные дифференцирования, то она алгебра Ли.

3. 4-арные дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8.

В свое время [26], В.Т. Филипповым было предложено некое обобщение алгебр Ли на случай n-арной операции. В последствии, данный класс алгебр получил название алгебры Филиппова.

Класс n-арных алгебр Мальцева был определен в [27], как некоторый естественный класс n-арных алгебр, содержащий класс n-арных алгебр векторного произведения. На самом деле, любая алгебра Филиппова является n-арной алгеброй Мальцева. К настоящему времени единственным известным примером простой n-арной алгебры Мальцева, не являющейся алгеброй Филиппова, служит простая тернарная алгебра Мальцева M_8, возникающая на 8-мерной композиционной алгебре. В свое время, дифференцирования тернарной алгебры M_8 были описаны в работе [28], а в работе [29] было построено ее корневое разложение и введена структура $\mathbb{Z}_3$-градуировки.

n-Арным якобианом мы называем следующую функцию, определенную на n-арной алгебре:

$$J(x_1,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n)=$$

$$[[x_1,\dots,x_n],y_2,\dots y_n]-\sum_{i=1}^{n}[x_1,\dots,[x_i,y_2,\dots,y_n],\dots,x_n].$$

Из определения следует, что если A — n-арная алгебра Филиппова, то

$$J(x_1,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n)=0$$

для всех $x_1,\dots,x_n,y_2,\dots,y_n\in A$.

n-Арной алгеброй Мальцева ($n\geq 3$) мы называем алгебру L с одной антикоммутативной n-арной операцией $[x_1,\dots,x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$-J(zR_x,x_2,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n)=J(z,x_2,\dots,x_n;y_2,\dots,y_n)R_x,$$

где $R_x=R_{x_2,\dots,x_n}$ — оператор правого умножения: $zR_x=[z,x_2,\dots,x_n]$.

Далее полагаем, что P — поле характеристики, отличной от 2,3, и обозначаем через A — композиционную алгебру над F с инволюцией $a\to\overline{a}$ и единицей 1 (см., например, [30]). Симметрическую билинейную форму $(x,y)=\frac{1}{2}(x\overline{y}+y\overline{x})$, определенную на A, предполагаем невырожденной и через $n(a)$ обозначаем норму элемента $a\in A$. Определим на A тернарную операцию умножения $[\cdot,\cdot,\cdot]$ правилом

$$[x,y,z]=x\overline{y}z-(y,z)x+(x,z)y-(x,y)z.$$

Тогда A становится тернарной алгеброй Мальцева [27], которая обозначается через $M(A)$, а если $dim(A)=8$, то через M_8.

Напомним, что дифференцированием тернарной алгебры M_8 называются линейные отображения D при произвольных элементах $x,y,z\in M_8$ удовлетворяющие равенству

$$D[x,y,z]=[D(x),y,z]+[x,D(y),z]+[x,y,D(z)].$$

В работе [28] было описаны дифференцирования тернарной алгебры Мальцева M_8, где было показано, что каждое дифференцирование является внутренним, то есть

$$Der(M_8)=\langle[R_{x,y},R_{x,z}]+R_{x,[y,x,z]}|x,y,z\in M_8\rangle.$$

Отметим, что в той же работе был построен базис $Der(M_8)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{B} = \{ \quad & \Delta_{23}-\Delta_{14}, \Delta_{24}+\Delta_{13}, \Delta_{25}-\Delta_{16}, \Delta_{26}+\Delta_{15}, \Delta_{27}+\Delta_{18},\\ & \Delta_{28}-\Delta_{17}, \Delta_{34}-\Delta_{12}, \Delta_{35}-\Delta_{17}, \Delta_{36}-\Delta_{18}, \Delta_{37}+\Delta_{15},\\ & \Delta_{38}+\Delta_{16}, \Delta_{45}-\Delta_{18}, \Delta_{46}+\Delta_{17}, \Delta_{47}-\Delta_{16}, \Delta_{48}+\Delta_{15},\\ & \Delta_{56}-\Delta_{12}, \Delta_{57}-\Delta_{13}, \Delta_{58}-\Delta_{14}, \Delta_{67}+\Delta_{14}, \Delta_{68}-\Delta_{13}, \Delta_{78}+\Delta_{12}\},\end{aligned}$$

где $\Delta_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$ и e_{ij} — обычные матричные единички.

Под 4-арным дифференцированием тернарной алгебры M_8 мы подразумеваем четверку $(D, E, F, G) \in End(A)^4$, такую что для произвольных элементов $x, y, z \in M_8$ верно

$$D[x, y, z] = [E(x), y, z] + [x, F(y), z] + [x, y, G(z)].$$

Пусть $1, a, b, c$ — ортонормированные вектора из A. Выберем следующий базис в A:

$$\wp = \{e_1 = 1, e_2 = a, e_3 = b, e_4 = ab, e_5 = c, e_6 = ac, e_7 = bc, e_8 = abc\}.$$

Известно, что для каждого $i \in \{2, \ldots, 8\}$ возможно выбрать j, k, l, m, s, t, зависящие от i, такие, что

$$e_i = e_je_k = e_le_m = e_se_t, \tag{10}$$
$$e_j = e_se_m = e_ke_i = e_te_l, \tag{11}$$
$$e_k = e_ie_j = e_me_t = e_se_l, \tag{12}$$
$$e_l = e_me_i = e_ke_s = e_je_t, \tag{13}$$
$$e_m = e_ie_l = e_te_k = e_je_s, \tag{14}$$
$$e_s = e_le_k = e_te_i = e_me_j, \tag{15}$$
$$e_t = e_ie_s = e_ke_m = e_le_j. \tag{16}$$

Теорема 5. Простая тернарная алгебра Мальцева M_8 не имеет нетривиальных 4-арных дифференцирований.

Доказательство. Пусть (D, E, F, G) — 4-арное дифференцирование алгебры M_8. Оператор правого умножения $R_{x,y}$ называется регулярным, если в фиттинговом разложении $M = M_0 \oplus M_1$ относительно $R_{x,y}$ размерность M_0 минимальна [29]. Согласно [29, Теорема 1], мы имеем корневое разложение алгебры $M_8 : M = M_0 \oplus M_\alpha \oplus M_{-\alpha}$, где $\alpha \in F$ такой, что $vR_{x,y} = \pm\alpha v$ для любого $v \in M_{\pm\alpha}$. Также из [29, Лемма 3] известно, что на тернарной алгебре M_8 существует нетривиальная градуировка. Если мы обозначим $M_{\pm\alpha}$ через $M_{\pm 1}$, то

$$[M_i, M_j, M_k] \subseteq M_{i+j+k(mod 3)}.$$

Заметим, что согласно [29, Лемма 1], операторы R_{e_p,e_q} при $p \neq q$ являются регулярными, следовательно, верно

$$D[e_p, e_p, e_q] = [E(e_p), e_p, e_q] + [e_p, F(e_p), e_q] + [e_p, e_p, G(e_q)],$$

то есть

$$[E(e_p), e_p, e_q] - [F(e_p), e_p, e_q] = 0.$$

Последнее, в силу регулярности оператора R_{e_p,e_q} и $\mathbb{Z}_3$-градуировки M_8, влечет, что $E(e_p)-F(e_p)=\xi_p e_p$. Аналогичное верно и для пары отображений F и G. Таким образом, мы можем считать, что

$$E_p^r = F_p^r = G_p^r, \text{ при } p \neq r. \tag{17}$$

Благодаря тому, что

$$D(e_s) = D[e_i, e_j, e_l] = [E(e_i), e_j, e_l] + [e_i, F(e_j), e_l] + [e_i, e_j, G(e_l)],$$

выполнив соответствующие операции умножений, мы имеем

$$\sum_{p=1}^{8} D_s^p e_p = E_i^1 e_t + E_i^i e_s + E_i^k e_m - E_i^m e_k - E_i^s e_i - E_i^t e_1 + \tag{18}$$

$$F_j^1 e_m + F_j^j e_s - F_j^k e_t - F_j^m e_1 - F_j^s e_j + F_j^t e_k -$$
$$G_l^1 e_k + G_l^k e_1 + G_l^l e_s - G_l^m e_t - G_l^s e_l + G_l^t e_m$$

(к примеру, $[e_i, e_l, e_k] = (e_i \overline{e_l}) e_k = (e_l e_i) e_k = -e_m e_k = e_k e_m = e_t$). Следовательно, легко вытекает $D_s^i = -E_i^s, D_s^j = -F_j^s, D_s^l = -G_l^s$. Таким образом, пользуясь соотношением (17), мы можем считать, что $D_s^p = -E_p^s$, где $p \in \{i, j, l\}$. Произвольность индекса i и соотношения (10-16) позволяют нам сделать вывод, что

$$D_q^p = -E_p^q = -F_p^q = -G_p^q, \text{ где } p, q \in \{1, \ldots, 8\} \text{ и } p \neq q. \tag{19}$$

Пользуясь соотношениями (19) и учитывая (18), мы можем получить

$$D_s^t = -D_1^i + D_k^j + D_m^l, \tag{20}$$
$$D_s^1 = D_t^i + D_m^j - D_k^l, \tag{21}$$
$$D_s^m = -D_k^i - D_1^j - D_t^l, \tag{22}$$
$$D_s^k = D_m^i - D_t^j + D_1^l. \tag{23}$$

Учитывая соотношения (20-23), базис алгебры $Der(M_8)$ и тот факт, что (D^*, D^*, D^*, D^*) — 4-арное дифференцирование для $D^* \in Der(M_8)$, мы можем считать, что матрица $[D]_\wp$ является верхнетреугольной. Это действительно верно, ведь алгебра 4-арных дифференцирований является замкнутой относительно сложения и, следовательно, мы можем обнулить все коэффициенты в нижнем треугольнике части матрицы $[D]_\wp$, посредством вычитания соответствующих дифференцирований из отображения D.

Полученное 4-арное дифференцирование мы будем обозначать как и прежде (D, E, F, G) и видим, что

$$D(e_\gamma) = \sum_{\beta \leq \gamma} D_\gamma^\beta e_\beta \text{ и } T(e_\gamma) = \sum_{\gamma \leq \beta} T_\gamma^\beta e_\beta, \text{ где } D_\gamma^\beta, T_\gamma^\beta \in P \text{ и } T \in \{E, F, G\}.$$

Легко заметить, что

$$D[e_6, e_7, e_8] = [E(e_6), e_7, e_8] + [e_6, F(e_7), e_8] + [e_6, e_7, G(e_8)] = (E_6^6 + F_7^7 + G_8^8) e_5,$$

таким образом, $D(e_5) = D_5^5 e_5$. Аналогично получаем

$$D[e_5, e_7, e_8] = [E(e_5), e_7, e_8] + [e_5, F(e_7), e_8] + [e_5, e_7, G(e_8)] = (E_5^5 + F_7^7 + G_8^8) e_6,$$

то есть, $D(e_6) = D_6^6 e_6$. Теперь легко видеть, что

$$D[e_5, e_6, e_8] = [E(e_5), e_6, e_8] + [e_5, F(e_6), e_8] + [e_5, e_6, G(e_8)] = (E_5^5 + F_6^6 + G_8^8) e_7,$$

что влечет $D(e_7) = D_7^7 e_7$. Пользуясь предыдущими рассуждениями имеем

$$D[e_6, e_5, e_7] = [E(e_6), e_5, e_7] + [e_6, F(e_5), e_7] + [e_6, e_5, G(e_7)] = (E_6^6 + F_5^5 + G_7^7)e_8,$$

откуда следует, что $D(e_8) = D_8^8 e_8$. Заметим, что

$$D_3^1 e_1 + D_3^2 e_2 + D_3^3 e_3 = D(e_3) = D[e_4, e_5, e_6] =$$

$$[E(e_4), e_5, e_6] + [e_4, F(e_5), e_6] + [e_4, e_5, G(e_6)] = (E_4^4 + F_5^5 + G_6^6)e_3 + E_4^7 e_8 + E_4^8 e_7$$

и значит $D(e_3) = D_3^3 e_3$. Осталось заметить, что $D(e_4) = D_4^4 e_4$ и $D(e_2) = D_2^2 e_2$. Это вытекает из соотношений $e_4 = [e_5, e_3, e_6]$ и $e_2 = [e_7, e_4, e_5]$, соответственно. Таким образом, мы показали, что $D(e_\gamma) = D_\gamma e_\gamma$ и, следовательно,

$$E(e_\gamma) = E_\gamma e_\gamma, F(e_\gamma) = F_\gamma e_\gamma, G(e_\gamma) = G_\gamma e_\gamma.$$

Пусть x, y, z некоторые различные элементы из базиса $\wp$. Тогда можно заметить, что

$$[E(x), y, z] + [x, F(y), z] = D[x, y, z] - [x, y, G(z)] = [F(x), y, z] + [x, E(y), z],$$

то есть, можно получить, что $E_x - F_x = E_y - F_y$. Откуда можно заключить, что $E = F + \alpha \cdot id$ при некотором $\alpha \in M_8$. Аналогично можно получить, что $G = F + \beta \cdot id$ при некотором $\beta \in M_8$. Отсюда следует, что

$$(D, E, F, G) = (D, F + \alpha \cdot id, F, F + \beta \cdot id).$$

В силу того, что $((\alpha + \beta) \cdot id, \alpha \cdot id, 0, \beta \cdot id)$ — 4-арное дифференцирование, можем считать, что

$$(D, E, F, G) = (D, F, F, F).$$

Осталось показать, что $D = 3F = 3f \cdot id, f \in P$. Для этого заметим, что в силу того, что (D, F, F, F) — 4-арное дифференцирование, верно

$$D_s = F_i + F_j + F_l, \tag{24}$$

$$D_t = F_i + F_k + F_l, \tag{25}$$

$$D_t = F_i + F_j + F_m, \tag{26}$$

$$D_s = F_i + F_k + F_m. \tag{27}$$

Вычитая из (24) равенство (25) и из (26) равенство (27), мы получаем

$$D_s - D_t = F_j - F_k = D_t - D_s.$$

Откуда, видим, что $D_t = D_s$ и $F_j = F_k$. Действую аналогично, мы получим $D = 3F = 3f \cdot id$. Таким образом, мы показали, что произвольное 4-арное дифференцирование тернарной алгебры Мальцева M_8 представимо в виде суммы 4-арных дифференцирований следующих видов

$$(D^*, D^*, D^*, D^*) \text{ и } (\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \cdot id, \alpha_1 \cdot id, \alpha_2 \cdot id, \alpha_3 \cdot id),$$

где $D^* \in Der(M_8)$ и $\alpha_i \in P$.

Для полного доказательства теоремы нам необходимо отметить, что в [28] показана структура алгебры дифференцирований тернарной алгебры Мальцева M_8. А именно, доказан изоморфизм с алгеброй B_3. Таким образом, легко видеть, что $\Delta(M_8) \cong B_3$. Теорема доказана.

В результате, из теорем 1 и 5 вытекает

Следствие 6. $\Delta(M_7) \cong \Delta(M_8)$.

В заключение, автор выражает благодарность проф. В. Н. Желябину и проф. А. П. Пожидаеву за внимание к работе и конструктивные замечания.

Список литературы

[1] Филиппов В. Т., *О δ-дифференцированиях алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **39** (1998), №6, 1409–1422.

[2] Филиппов В. Т., *О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **40** (1999), №1, 201–213.

[3] Филиппов В. Т., *О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр*, Алгебра и Логика, **39** (2000), №5, 618–625.

[4] Zusmanovich P., *On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras*, J. of Algebra, **324** (2010), №12, 3470–3486. [http://arxiv.org/abs/0907.2034]

[5] Кайгородов И. Б., *О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр*, Алгебра и Логика, **46** (2007), №5, 585–605. [http://arxiv.org/abs/1010.2419]

[6] Кайгородов И. Б., *О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **50** (2009), №3, 547–565. [http://arxiv.org/abs/1010.2807]

[7] Кайгородов И. Б., *О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр*, Алгебра и Логика, **49** (2010), №2, 195–215. [http://arxiv.org/abs/1010.2423]

[8] Желябин В. Н., Кайгородов И. Б., *О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки*, Алгебра и Анализ, **23** (2011), №4, 40–58. [http://arxiv.org/abs/1106.2884]

[9] Кайгородов И. Б., *Об обобщенном дубле Кантора*, Вестник Самарского гос. университета, **78** (2010), №4, 42–50. [http://arxiv.org/abs/1101.5212]

[10] Кайгородов И. Б., *О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр*, Мат. заметки, 2012, принято к печати, [http://arxiv.org/abs/1106.2680]

[11] Кайгородов И. Б., *Об обобщенных δ-дифференцированиях*, Сиб. матем. ж., сдано в печать. [http://arxiv.org/abs/1107.4420

[12] Кайгородов И. Б., *О δ-дифференцированиях n-арных алгебр*, Известия РАН. Серия математическая, сдано в печать. [http://arxiv.org/abs/1107.442]

[13] Leger G., Luks E., *Generalized derivations of Lie Algebras*, J. of Algebra, **228** (2000), 165–203.

[14] Zhang R., Zhang Y., *Generalized derivations of Lie superalgebras,* Comm. Algebra, **38** (2010), №10, 3737–3751.

[15] Komatsu H., Nakajima A., *Generalized derivations of associative algebras,* Quaest. Math., **26** (2003), №2, 213–235.

[16] Komatsu H., Nakajima A., *Generalized derivations with invertible values,* Comm. Algebra, **32** (2004), №5, 1937–1944.

[17] Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M., *Ternary derivations of generalized Cayley-Dickson algebras*, Comm. Algebra, **31** (2003), №10, 5071–5094.

[18] Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M., *Ternary derivations of finite-dimensional real division algebras*, Linear Algebra Appl., **428** (2008), №8-9, 2192–2219.

[19] Perez-Izquierdo J. M., *Unital algebras, ternary derivations, and local triality,* Algebras, representations and applications, 205–220, Contemp. Math., 483, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[20] Шестаков А. И., *Тернарные дифференцирования сепарабельных конечномерных йордановых алгебр,* Сиб. мат. ж., сдано в печать.

[21] Кайгородов И. Б., $(n+1)$*-Арные дифференцирования простых n-арных алгебр*, Алгебра и Логика, **50** (2011), №5, 690–691.

[22] Кайгородов И. Б., *О $(n+1)$-арных дифференцированиях полупростых алгебр Филиппова,* arxiv.

[23] Мальцев А. И., *Аналитические лупы*, Матем. сб., **36 (78)** (1955), №3, 569–576

[24] Кузьмин Е. Н., *Структура и представления конечномерных алгебр Мальцева*, в кн.: Исследования по теории колец и алгебр (Труды Ин-та математики СО АН СССР, 16), Новосибирск, Наука, 1989, 75–101.

[25] Гришков А. Н., *Строение и представления бинарно-лиевых алгебр*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **44** (1980), №5, 999–1030

[26] Филиппов В. Т., *n-Лиевы алгебры*, Сиб. мат. ж., **26** (1985), №6, 126–140.

[27] Пожидаев А. П., *n-Арные алгебры Мальцева,* Алгебра и логика, **40** (2001), №3, 309–329.

[28] Pozhidaev A. P., Saraiva P., *On Derivations of the Ternary Malcev Algebra M_8,* Comm. Algebra, **34** (2006), №10, 3593–3608.

[29] Пожидаев А. П., *Корневое разложение тернарной алгебры Мальцева M_8,* Сиб. матем. журн., **46** (2005), №4, 901–906.

[30] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., *Кольца, близкие к ассоциативным,* М.: Наука (1978).